A 2.14.2 TEORÍA DE CIRCUITOS I

CAPÍTULO 1:

CONCEPTOS Y DEFINICIONES.
LEYES DE KIRCHHOFF

Cátedra de Teoría de Circuitos I

Edición 2015

Capítulo I:
CONCEPTOS Y DEFINICIONES. LEYES DE KIRCHHOFF.

Los circuitos eléctricos son fundamentales para la ingeniería, tanto eléctrica como electrónica, involucrándose en los mismos fenómenos muy interesantes de origen eléctrico así como magnético. Pero, a pesar de que en su estudio se pueden llegar a discutir los fundamentos físicos del análisis, la teoría de circuitos comienza con definiciones y axiomas, no con física. La razón es que un problema físico casi nunca se analiza exactamente, lo cual es una consecuencia tanto de nuestra falta de habilidad para describir completamente una situación física como de la creciente complejidad del análisis en la medida que se pretenda una mayor precisión.

Así, un problema que involucra eventos reales siempre se aproxima realizando suposiciones que lo simplifican, válidas bajo ciertas condiciones, constituyendo así un “modelo” de los eventos en estudio. Evidentemente, si partimos de “modelos”, y no de elementos o sistemas reales, puede haber discrepancias entre la predicción hecha por la Teoría de Circuitos y el comportamiento real de los mismos. Será función del ingeniero contrastar los resultados del modelo con los obtenidos a partir del ensayo del elemento real, y estimar así la validez física del mismo.

En síntesis, la Teoría de Circuitos surge de considerar los hechos físicos que resultan de una interconexión dada de dispositivos eléctricos, y siendo que en muchos casos dichos dispositivos se vinculan con el medio que los rodea mediante sus bornes, se puede caracterizar su comportamiento mediante un conjunto de **corrientes** y **tensiones** denominadas variables del circuito.

1.1 Unidades.

De acuerdo con la práctica internacional, en el presente curso utilizaremos el Sistema Internacional de Unidades, abreviado SI y vulgarmente conocido como sistema métrico o MKS. Las seis unidades básicas del SI se muestran en la tabla siguiente:

MAGNITUD	UNIDAD	SÌMBOLO
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	Kg
Tiempo	Segundo	S
Carga eléctrica	Coulomb	C
Temperatura	Grado Kelvin	K
Intensidad lumínica	Candela	cd

Las restantes unidades son derivadas de estas. Así, por ejemplo, el trabajo o energía es el producto de la fuerza por la distancia, y tiene una unidad derivada denominada joule (1J = 1Newton × metro).

Respecto a la nomenclatura a utilizar, reservaremos las letras mayúsculas para indicar magnitudes invariantes en el tiempo y las minúsculas para magnitudes que son una función del tiempo.

1.2 Carga

Todos los fenómenos eléctricos son manifestaciones de carga eléctrica. Las partículas atómicas que transportan carga eléctrica son los protones y los electrones, los cuales tienen cargas de mismo valor pero signos opuestos. La carga de un protón es $1{,}602\times10^{-19}$ coulomb, siendo el coulomb (C) la unidad de carga en el sistema internacional (SI), por lo que la carga del electrón será $-1{,}602\times10^{-19}$ C. Según la tabla anterior, vemos que la carga es una unidad fundamental.
Sabemos que las cargas de signos contrarios se atraen unas a otras, y las de igual signo se repelen. Dos cargas de 1C separadas una distancia de 1 m ejercerían una sobre otra una fuerza de:

$$F = 8{,}99\times10^{9}\ (\mathrm{N})$$

La cantidad de carga involucrada en procesos eléctricos simples puede ser muy grande; por ejemplo, se requiere 3,036 C de carga para efectuar el plateado electrolítico de 1 gramo de cobre.

Ejercicios de aplicación:

1) *Encuentre la fuerza de atracción entre un protón y un electrón separados por una distancia igual al radio de la órbita más pequeña que sigue un electrón en un átomo de hidrógeno (5×10^{-11} m).*
2) *Encuentre la fuerza de atracción en newtons entre las cargas $Q_1 = +1\mu C$ y $Q_2 = -2\ \mu C$ cuando la distancia que las separa es:*
    a) *$r = 1$ m*
    b) *$r = 3$ m*
    c) *$r = 10$ m*
    d) *$r = 10$ cm*

Grafique la función obtenida y obtenga conclusiones.

1.3 Corriente

Ordinariamente, la Teoría de Circuitos estudia los efectos de la carga. Al flujo de carga (o variación de carga por unidad de tiempo) a través de una superficie se lo denomina corriente eléctrica (ver figura 1).

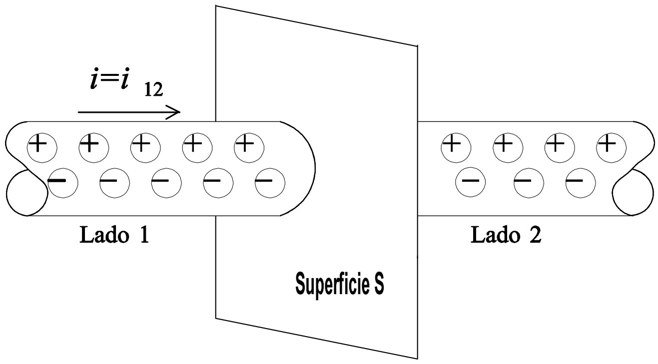


Fig. 1

Por definición, la corriente eléctrica $i = i_{12}$ que pasa a través de una superficie S desde el lado 1 al lado 2 es la carga positiva neta por unidad de tiempo que atraviesa la superficie en la misma dirección. Matemáticamente, lo expresamos como:

$$i(t) = \frac{d\,q(t)}{d\,t}$$

donde:

i: es la corriente, expresada en amperes (A),
q: es la carga, expresada en coulombs (C),
t: es el tiempo, expresado en segundos (s).

De esta manera, resulta que 1 ampere es equivalente a 1 coulomb por segundo (1A = 1C/s).

Podemos determinar la carga neta que pasa a través de la superficie en el intervalo $(-\infty, t)$ si integramos la ecuación anterior con respecto al tiempo. Suponiendo que $q(-\infty) = 0$, será:

$$q(t) - q(-\infty) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau \qquad \Rightarrow \qquad q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau$$

El instrumento que se utiliza para medir corriente se denomina amperímetro. Dado que la corriente se interpreta como una magnitud circulante en el circuito, para medir la corriente por el elemento 1 en la figura 2a, el amperímetro se debe insertar **en serie** en el circuito, como se muestra en la figura 2b.

Decimos que dos o más elementos están conectados en serie cuando están recorridos por la misma corriente.

La lectura del amperímetro se corresponde con el valor de la variable corriente i_1 marcada en el diagrama. Nótese que i_1 tiene una flecha asociada con ella, e ingresa al amperímetro por el terminal marcado como positivo (+). Al conectarse de esta manera, la corriente tendrá, por definición, un valor positivo si la lectura del amperímetro es positiva. Una lectura negativa significará que el sentido real de circulación de la corriente i_1 es opuesto al que habíamos supuesto. Es decir **cuando la polaridad del amperímetro y el sentido convencionalmente positivo adoptado para la corriente** (e indicado por la flecha) **concuerdan**, como en la figura 2b, **la lectura del amperímetro y el valor real de la corriente son iguales**. Si las polaridades no concuerdan (es decir, la corriente real no ingresa por el terminal positivo del amperímetro), la lectura del amperímetro y el valor verdadero de la variable difieren en el signo.

Cuando para la corriente utilizamos una notación de doble subíndice ($i_{22'}$), la flecha de referencia (y por lo tanto, el sentido supuesto de circulación) apunta desde el punto marcado con el primer subíndice ($\bullet 2$) hacia el punto marcado con el segundo subíndice ($\bullet 2'$).

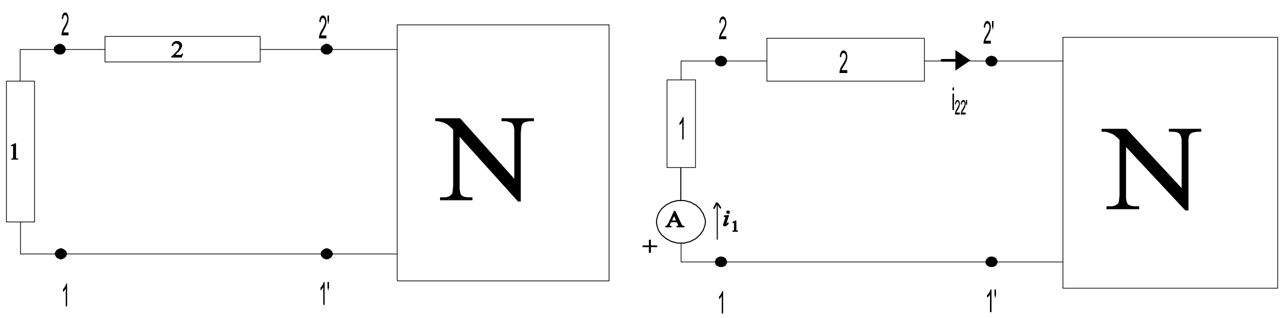


Fig. 2a

Fig. 2b

Fig. 2

Ejercicios de aplicación:

1) *Si la corriente en un conductor es constante e igual a 2 mA, ¿cuánto tiempo se requiere para que por el conductor pasen 4600×10^{-6} C?*
2) *¿Se quemará un fusible cuya corriente nominal es 1 A si pasan por él 86 C en 1,2 minutos?*
3) *La carga que fluye por la superficie imaginaria de la figura 1 es de 0,16 C cada 64 ms. Determine la corriente en amperes.*
4) *Una carga **q** pasa a través de una superficie de la figura 1 desde el lado 1 al 2 mediante un conductor. Graficar q(t) e i_{12} (t) para el intervalo $-20 \le t \le 20$ s si **q** medida en coulombs, está definida por las siguientes funciones:*

$$\text{a) } q(t) = 4 + 2t \qquad \text{b) } q(t) = e^{-|t|} \qquad \text{c) } q(t) = \begin{cases} t & -20 \le t < 5 \text{ s} \\ 5 & 5 \le t < 10 \text{ s} \\ -2(t - 12{,}5) & 10 \le t < 15 \text{ s} \\ -5 & 15 \le t < 20 \text{ s} \end{cases}$$

5) *Una corriente i_{12} pasa a través de un conductor a través de una superficie. Graficar $i_{12}(t)$ y q(t), la carga que pasa a través de la superficie entre -2 y t, para $-2 \le t \le 2$ s, si $i_{12}(t)$, medida en amperes, está definida por las siguientes funciones:*

$$\text{a) } i(t) = \frac{1}{1 + t^2} \qquad \text{b) } i(t) = e^{2t} \qquad \text{c) } i(t) = \begin{cases} t & -20 \le t < 5 \text{ s} \\ 5 & 5 \le t < 10 \text{ s} \\ -2(t - 12{,}5) & 10 \le t < 15 \text{ s} \\ -5 & 15 \le t < 20 \text{ s} \end{cases}$$

1.4 Tensión, voltaje o diferencia de potencial.

Es la cantidad de energía eléctrica requerida para desplazar una unidad de carga desde un punto hacia otro del espacio. Así, por definición, la tensión, voltaje o diferencia de potencial (d.d.p.) $v = v_{12}$ entre los puntos • 1 y • 2 de la figura 2a es igual a la cantidad de energía eléctrica gastada para desplazar una unidad de carga positiva desde el punto • 1 al punto • 2.
Lo antes expresado se resume en la siguiente ecuación:

$$v(t) = \frac{d\, w(t)}{d\, q(t)}$$

donde:

***v**: es la tensión (voltaje, o diferencia de potencia d.d.p.), expresada en volts*
***w**: es la energía, expresada en joules*
***q**: es la carga, expresada en coulombs*

En nuestro curso hablaremos indistintamente de voltaje, tensión, caída de tensión o diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2. La unidad del SI para la tensión es el volt (V), el cual es equivalente a un Joule por Coulomb (1 V = 1J/ 1 C). Vemos que siempre hablaremos de potencial de un punto con respecto a otro, o de diferencia de potencial o caída de tensión entre dos puntos. Asimismo, podremos asignarle a uno de esos puntos un valor de potencial de referencia, usualmente cero. Esta posibilidad nos va a resultad muy útil cuando apliquemos el método de nudos para resolución de circuitos.

El instrumento que utilizaremos para medir diferencias de potencial es el voltímetro, el cual se conecta siempre en **paralelo,** ya sea con un elemento o entre dos puntos del circuito.

Decimos que dos o más elementos están conectados **en paralelo** cuando se encuentran sometidos a la misma diferencia de potencial.

En la figura 3, por ejemplo, medimos la tensión en bornes del elemento A (entre •1 y •2), conectando el voltímetro como se muestra. La lectura del voltímetro se asocia, de esta manera, a la d.d.p. v_{12}, la cual se indica con sus signos + y - en bornes del elemento A. Nótese que la marca **+** de v_{12} coincide con el borne + del voltímetro. Si la lectura del voltímetro es negativa, el valor de v_{12} es negativo y, tal como ocurría antes con la corriente, nos indicará que el sentido supuesto y el sentido real de la d.d.p. son opuestos. En otras palabras, la variable v_{12} tomará tanto valores positivos como negativos, indicados por el signo de la lectura del voltímetro. Es importante remarcar que esta correspondencia entre lectura y valor de la variable está basada en la conexión particular mostrada, es decir, que el borne + del voltímetro y el sentido convencionalmente positivo de la variable se refieran al mismo punto en el elemento A.

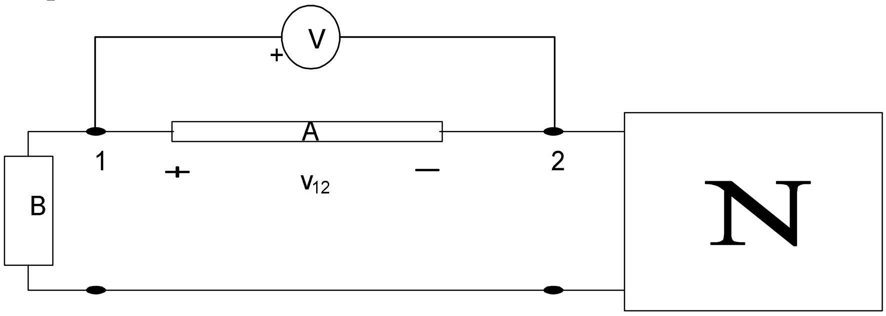


Fig. 3

Si ambas marcas de polaridad no concuerdan (v_{12} marcada **-** en la izquierda y **+** en la derecha), el valor de la variable debe tomarse como el negativo de la lectura del voltímetro. Una lectura positiva del instrumento corresponde, de esta forma, a un valor negativo de la tensión.

Recordamos que las mediciones de tensión se toman, **siempre**, en bornes de un elemento o entre dos puntos de un circuito. Hablar de la tensión de un punto sin especificar la ubicación del otro no tiene sentido físico. Podemos utilizar, entonces, una notación con doble subíndice $\mathbf{V_{12}}$ obviando indicar la polaridad de los bornes, donde el primer subíndice indica el punto al cual se conecta el borne **+** del voltímetro, y el segundo, el punto al cual se conecta el borne **-**. En caso de utilizar la notación de subíndice simple ($\mathbf{V_A}$), sí deberá indicarse en el circuito el borne adoptado como convencionalmente positivo.

Ejercicios de aplicación:
1) Encontrar el voltaje entre dos puntos de un sistema eléctrico si se gastan 60 J de energía desplazando una carga de 20 C entre los mismos.
2) Determinar la energía que se disipa para mover una carga de 50 μC a través de una diferencia de potencial de 6 V.
3) Ciertas mediciones de temperatura indican que un calentador ha provisto 1200J de energía a un recipiente de agua en un intervalo de 1 minuto. La carga que ha pasado por el calentador en este intervalo es de 100 C. ¿Cuánto es la tensión en bornes del mismo?

1.5 Dipolos

Se denomina **dipolo** a todo componente de un circuito eléctrico que contiene sólo dos bornes para su interconexión con otros componentes y al cual podemos hacerle corresponder una diferencia de potencial y una corriente.

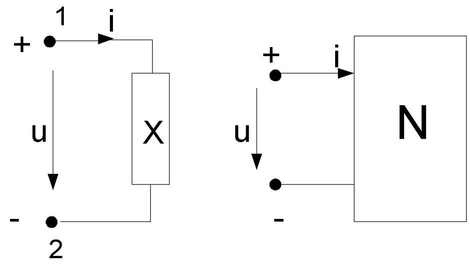


Fig. 4

El dipolo podrá estar compuesto internamente, por uno o varios elementos.

Si φ_1 es el potencial absoluto del borne 1 y φ_2 el del borne 2, la d.d.p. U_{12} será:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$$

Por convención, diremos que los sentidos de tensión y corriente son concordantes cuando la corriente **I** ingrese al dipolo por el borne 1 (+).

Característica o relación Volt-Ampere (V-A) de un dipolo es la relación tensión - corriente que le es propia, así como la representación gráfica de la misma.

$$U = U\,(I) \qquad\qquad I = I\,(U)$$

Nota: La ley de Ohm es la relación volt-ampere correspondiente a una resistencia ($\boldsymbol{V} = R\bullet\boldsymbol{I}$).

Según sea dicha relación, podemos clasificarlos en:

Activos: la característica V-A no pasa por el origen, o sea, $U \neq 0$ para $I = 0$ ó $I \neq 0$ para $U = 0$.

Pasivos: la característica V-A pasa por el origen, o sea $V = 0$ para $I = 0$, y viceversa.

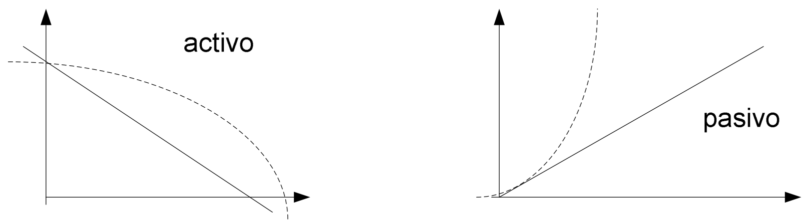


Fig. 5

Lineales: su gráfica es una recta.
Anómalos: su gráfica no es una recta. Se los subclasifica en simétricos o asimétricos.

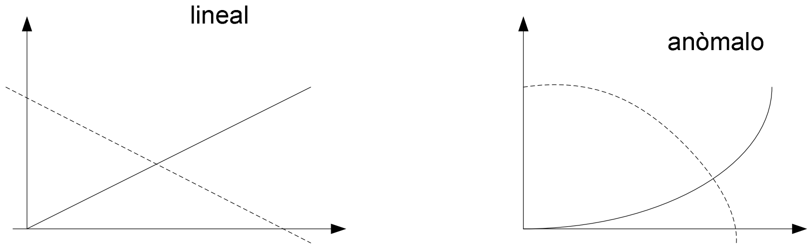


Fig. 6

Simétricos: cumplen con la condición U(I) = -U(-I)

Asimétricos: cumplen con la condición U(I) ≠ -U(-I)

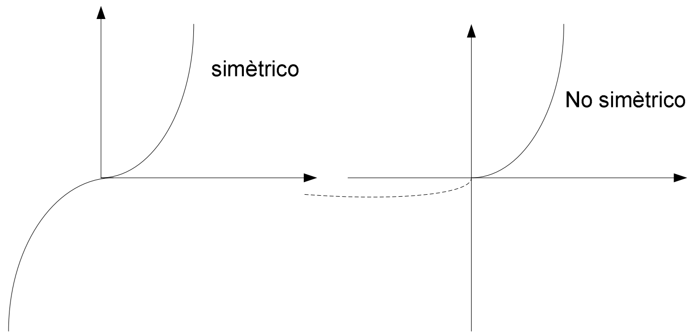


Fig. 7

1.6 Modelo matemático – Relación volt-ampere (V-A)

El estado de régimen (o respuesta) de un circuito queda completamente determinado si se conocen las tensiones y corrientes en todas sus ramas. Las corrientes de rama, a su vez, se relacionan con las tensiones de rama a través de ecuaciones fundamentales que dependen de la característica de los elementos independientes que hay en la misma. Por ejemplo, en una rama resistiva, la d.d.p. V es

$V = R \bullet I$ **Ley de Ohm**

siendo I la corriente de la rama y R la resistencia de la rama.

Diremos que un dipolo está caracterizado si podemos determinar la relación funcional entre la tensión **V**en bornes del mismo y la corriente **I** que lo recorre. Si obtenemos una expresión que vincule **V** con **I**, hemos determinado, en principio, su modelo matemático, o **relación volt-ampere**.

Para determinar experimentalmente la relación V-A de un dipolo, medimos v(t) e i(t) en bornes del mismo para distintos valores de la fuente y las graficamos. Para su manejo funcional, tratamos de describir la curva matemáticamente. Si es simple, como una recta, será sencillo hacerlo. Si por el contrario, a la gráfica V-I no es posible asociarle una función de cualquier orden en todo el rango de operación, nos vemos obligados a analizar el comportamiento del dipolo dentro de cierto rango limitado de variación de las variables. En este caso será necesario sectorizar el entorno de variabilidad de V e I, optando, en el caso más simple, por una linealización por tramos de la característica V-I. En este caso tendremos una modelización por tramos, o representamos segmento-lineal, caso en el cual los modelos adoptados deben cumplir con las condiciones de borde (extremos comunes de dos tramos consecutivos), no pudiendo haber discontinuidad de la magnitud en estudio.

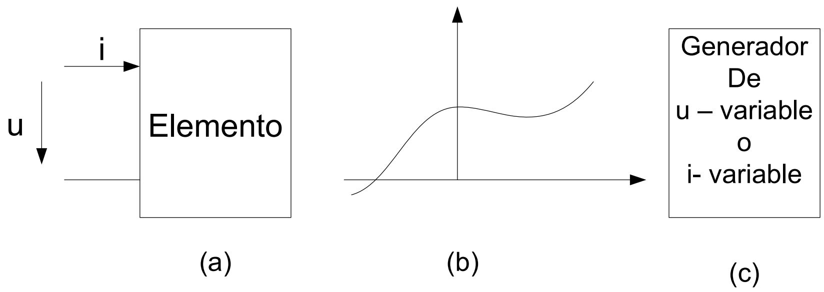


Fig. 8

Ejercicios de aplicación:
Indicar qué tipo de relación V-A es cada una de las siguientes y graficarlas:

a) $V = 5\,I$ *b)* $I = 2\,V + 4$ *c)* $V = 3\,I^2$

1.7 Convenciones

Una amplia variedad de dispositivos eléctricos puede modelizarse en función de uno o más elementos de dos terminales, con cada uno de los cuales hay asociadas una variable tensión y una variable corriente que podrán ser, o no, función del tiempo.
Como consecuencia de la ley de Gauss (conservación de la cantidad de carga), la corriente i(t) que entra por un terminal del elemento es idéntica a la que sale por el otro terminal, estando v(t) e i(t) vinculadas entre sí por la característica V-A del elemento. Por convención, i (t) será positiva si circula en dirección de la flecha, y negativa si lo hace en sentido contrario. Igualmente, los signos (+) y (-) asignan un sentido de referencia a la tensión, siendo v (t) positiva si el terminal indicado (+) está a mayor potencial que el (-), y negativa si el terminal indicado (+) está a menor potencial que el (-).

Hablaremos de **convención pasiva** cuando la corriente ingresa al dipolo al borne al cual se asocia el potencial mayor (+). Por el contrario, hablaremos de **convención activa** si la corriente sale del dipolo por el borne marcado (+).

convención pasiva *convención activa*

Fig. 9

Si se respeta cualquiera de estas convenciones, no será necesario indicar los sentidos de referencia de ambas variables, dado que la especificación de uno implica el otro. Sin embargo, debe entenderse claramente que **la asignación de sentidos de referencia no impone restricciones** a los sentidos reales de las tensiones y corrientes asociadas con cada elemento. Simplemente expresa direcciones de referencia con respecto a las cuales pueden expresarse otras tensiones y corrientes de cualquier magnitud, y no tiene por qué coincidir con el sentido real de la magnitud, que recién se determinará luego de realizar los cálculos correspondientes.

1.8 Potencia. Energía

Por definición, la potencia representa la velocidad de cambio de energía, por lo que podemos expresarla como la cantidad de energía entregada al (o consumida por) el dispositivo en estudio en la unidad de tiempo:

$$p(t) = \frac{d\,w(t)}{d\,t}$$

donde:

***p(t) :** es la potencia instantánea expresada en watts (W, unidad del SI) (1 W = 1 J/seg)*
***w(t)**: es la energía instantánea expresada en joules (J)*
***t:** tiempo, expresado en segundos (s)*

Vimos que la tensión o diferencia de potencial v(t), es la energía en joules por coulomb absorbido de carga positiva que se desplaza por el dispositivo X, desde el terminal positivo **(+)** al negativo (-), mientras que la corriente es la carga positiva neta que se desplaza a través de una superficie por unidad de tiempo. Por lo tanto, la potencia eléctrica instantánea absorbida (o entregada) por el dispositivo X en joules/segundo, o watts, resulta ser igual al producto de los valores instantáneos de tensión y corriente:

$$p(t) = \frac{d\,w}{d\,t} = \left(\frac{d\,w}{d\,q} \right) . \left(\frac{d\,q}{d\,t} \right) = v(t)\,.\,i(t)$$

Los sentidos de referencia para tensión y corriente mostrados en la figura 10, con la flecha de corriente entrando al dispositivo por el terminal marcado **+** responden a la **convención pasiva,** que supone que el elemento X consume potencia. Por lo tanto, la potencia **absorbida** por el elemento X**, con la convención de signos pasiva**, estará dada por:

$p(t) = +v(t)\,.\,i(t)$ *(convención de signos pasiva)*

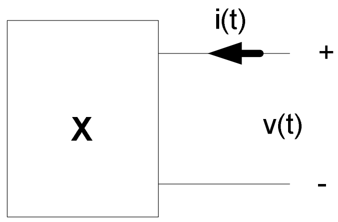


Fig. 10

Si se invierte el sentido de referencia para v(t) o i(t), pero no para ambos, como se muestra en la figura 11 (**convención activa)**, la potencia eléctrica absorbida por el elemento X está dada por la siguiente ecuación:

$p(t) = -\,v(t)\,.\,i(t)$ *(convencion de signos activa)*

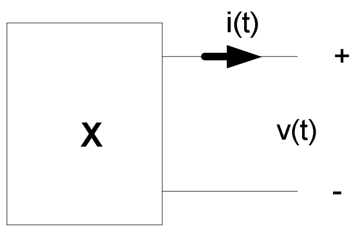


Fig. 11

En este caso, decimos que el elemento **entrega** potencia al resto del circuito.

En síntesis, la potencia instantánea podrá ser positiva o negativa, según sean los signos de la tensión y la corriente. Si la **potencia absorbida es positiva**, significa que el elemento **consume potencia**, si la **potencia absorbida es negativa**, significa que el dispositivo **entrega potencia** al resto de la red.

Salvo que se indique lo contrario, se usará normalmente la convención de signos pasiva.

Dado que p(t) podrá ser negativa durante un tiempo y luego positiva, es importante saber si, en promedio, el elemento X recibe o entrega potencia. Para determinar esto promediaremos la potencia instantánea durante un cierto período. El resultado es la **potencia media** asociada a X, y está dada por:

$$P = \frac{1}{t_2 - t1}\int_{t_1}^{t_2} p(t)\, dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t).i(t)\, dt$$

donde t_2 - t_1 es la longitud del intervalo de tiempo en el cual se promedia la potencia instantánea. Si la potencia media P es positiva, el elemento X recibe potencia, si la potencia media P es negativa, el elemento X entrega potencia. La potencia media también se mide en watts.

Partiendo de la expresión que nos dice que la potencia es la variación de energía por unidad de tiempo, separando las variables e integrando entre t_1 y t_2, podemos resolverla para w(t):

$$d\,w = p\,dt = v\,i\;d\,t$$

$$\int_{w(t_1)}^{w(t_2)} dw = \int_{t_1}^{t_2} p\;dt = \int_{t_1}^{t_2} v\,i\,dt \Rightarrow$$

$$w(t_2) - w(t_1) \;= \int_{t_1}^{t_2} p\;dt = \int_{t_1}^{t_2} v\;i\;d\,t$$

$$w(t_2) = w(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} p\;dt = w(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v\;i\;dt$$

En esta última ecuación, $w(t_2)$ y $w(t_1)$ representan la energía asociada con X en los instantes de tiempo $t = t_2$ y $t = t_1$, respectivamente, mientras que $\int_{t_1}^{t_2} v\;i\;dt$ representa la energía entregada a X en el intervalo (t_1 , t_2).

Si reordenamos la ecuación que representa la potencia media obtenemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} v\,i\,dt = P\;(t_2 - t_1)$$

con lo que la expresión de la energía en el instante t_2 puede escribirse:

$$w(t_2) = w(t_1) + P\,(t_2 \text{-} t_1)$$

A menudo t_1 se toma igual a cero y $t_2 = t$, con lo que la ecuación anterior se escribe:

$$w(t) = w(0) + P(t_2 - t_1) = w(0) + P\,t$$

siendo w(t) y w(0) los estados de energía de X en los tiempos t y 0, respectivamente. Salvo que se especifique lo contrario, supondremos w(0) = 0 (no hay energía almacenada).

El principio de conservación de la energía requiere que la potencia absorbida por un elemento sea suministrada por alguna fuente: energía química proveniente de una batería, energía mecánica a partir del accionamiento de un generador, etc. Por esta razón, la suma algebraica de las potencias eléctricas instantáneas absorbidas por todos los componentes de un circuito debe ser cero, ya que la potencia suministrada se trata como potencia absorbida negativa. Esto se expresa como:

$$\sum p(t)_{absorbidas} = 0$$

La integración de esta expresión conduce a que la suma algebraica de las potencias medias absorbidas por todos los componentes de un circuito debe ser, también, igual a cero (principio de conservación de potencia).

Nota: El valor nominal ampere-hora

Las baterías tienen un valor nominal de su capacidad calculado en amperes-hora (Ah) o miliamperes-hora (mAh). Una batería con un valor nominal de 100 amperes-hora, en teoría, produce una corriente constante de 1 A para 100 h, de 2 A para 50 h, 10 A para 10 h, etc, con lo que se determina la ecuación siguiente:

Vida (horas) = Valor nominal amperes-horas (Ah) / amperes descargados (A)

Los factores que afectan este valor nominal son la temperatura y la velocidad de descarga, produciéndose las dos situaciones siguientes:

- la capacidad de una batería disminuye con un aumento en la demanda de corriente
- la capacidad de una batería disminuye en temperaturas relativamente bajas y altas, en comparación con la temperatura ambiente.

Ejercicios de aplicación:

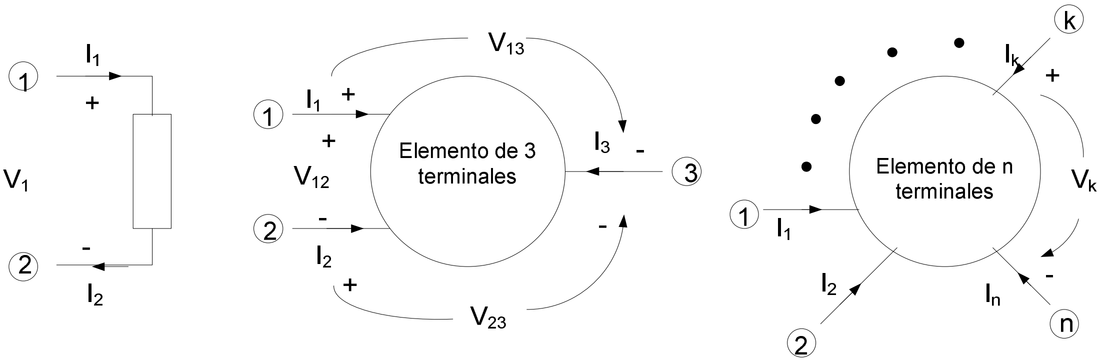
1. *Si un conductor por el que pasa una corriente de 200 mA disipa 40 J de energía eléctrica en calor en 30s, ¿cuál es la caída de tensión a través del conductor?*
2. *La diferencia de potencial entre dos puntos en un circuito eléctrico es 24 V. Si se disiparan 0,4 J de energía en un período de 5 ms, ¿cuál sería la corriente circulante entre los dos puntos?*
3. *¿Cuánta carga pasa por una batería de 22,5 V si la energía consumida es 90 J?*
4. *¿Cuál es el valor nominal en Ah de una batería que proporciona 0,8 A durante 76 h?*

1.9 Leyes de Kirchhoff

En circuitos eléctricos a parámetros concentrados, las d.d.p. entre dos nudos cualesquiera y las corrientes circulantes por cualquier elemento desde un nudo están bien definidas, dado que en ellos, fuera del manto de los componentes que los integran, no existe campo electromagnético, cosa que sabemos no es cierta para los componentes reales.

Dado que la dirección real del flujo de corriente y la polaridad real de la d.d.p. en un circuito pueden variar de un instante a otro, generalmente es imposible especificar de antemano los sentidos reales tensión y corriente en el mismo. Así como en la mecánica clásica es necesario establecer un esquema de referencia a partir del cual las posiciones instantáneas reales de un sistema de partículas pueden especificarse unívocamente, **debemos establecer un marco de referencia eléctrico en un circuito para que las corrientes y tensiones sean medidas sin ambigüedad**.

Para establecer este marco de referencia eléctrico asignaremos arbitrariamente una dirección (o sentido) de referencia a cada variable corriente mediante una flecha, y una polaridad de referencia a cada variable tensión mediante un par de signos (+) y (-), como se muestra en la fig. 12, para elementos de 2, 3 y n terminales.



(a) (b) (c)

Fig. 12

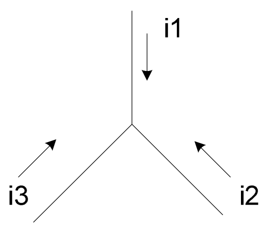
En cada cable terminal indicamos una flecha llamada sentido de referencia de corriente, cuyo rol es muy importante. Consideremos la fig. 12a. Si en un instante t_o, $i_2(t_o) = 2$ A, significa que en t_o sale una corriente de 2 A desde el dipolo a través del nudo 2. Si, en un instante posterior t_1, $i_2(t_1) = -25$ mA, significa que en t_1 una corriente de 25 mA ingresa al borne. Vemos así que el sentido de referencia NO coincide necesariamente con el sentido real de la magnitud en estudio.

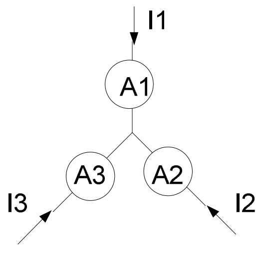
Analizando el sentido de la ddp en la fig.12 a, vemos que si, en t_o, $v_1(t_o) = 3$ mV, significa que en ese instante, el potencial del nudo 1 es 3 mV mayor que el del borne 2.

En la fig.12b, como se trata de un elemento de múltiples terminales, asignamos signos + y - a los pares de terminales, por ejemplo 1-2, 2.3 y 1-3. Estos signos indican el sentido de referencia de la d.d.p. Análogamente, en la fig.12 c, si en un tiempo t_1, $v_k(t_1) = -320$ V, significa que el potencial eléctrico del nudo k es, en t_1, 320 V menor que el del nudo n.

1.9.1 Ley de Kirchhoff de corrientes.

Definiremos como **nudo** al punto de unión de dos o más conductores. Si exploramos con un amperímetro la distribución de corrientes en los nudos de una red real, descubriremos que existe una ley que las gobierna. Consideremos, por ejemplo, el nudo siguiente:





(a) (b) *Fig. 13*

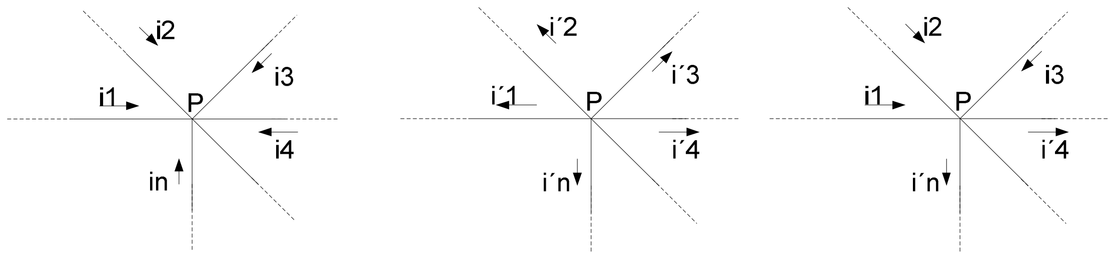
Con este nudo están asociadas tres corrientes. Si se conectan tres amperímetros con polaridades concordantes con las corrientes (fig. 13b), se observa que:

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

Esto significa que los sentidos de las corrientes no pueden ser los mismos, sino que al menos uno de ellos debe ser (-) para poder satisfacer la ecuación. Esta condición la podemos resumir diciendo que:

La suma algebraica de las corrientes en un nudo es nula

y es una consecuencia de la indestructibilidad de la carga eléctrica, lo que implica la imposibilidad de acumulación de corrientes de conducción en un nudo. Esto se obtiene siempre independientemente del sentido de las corrientes de las ramas concurrentes, y fue el físico alemán Kirchhoff quien, en 1826, lo observó por primera vez, por lo que a la ley que gobierna las corrientes en todos los nudos de un circuito se conoce como ley de Kirchhoff de corrientes, o Primera Ley de Kirchhoff. Esta ley puede plantearse de tres formas distintas:



(a) (b) (c)

Fig. 14

1º) Si las n corrientes ingresan en el nudo P (fig. 14 a), la LKC la podremos expresar diciendo que la sumatoria de corrientes entrantes al nudo es cero:

$$\sum_{j=1}^{n} i_j = 0$$

2º) Si las n corrientes salen del nudo, diremos que la sumatoria de las corrientes salientes del nudo es nula:

$$\sum_{j=1}^{n} i'_j = 0$$

3º) En el caso en que haya corrientes entrantes y salientes, diremos que la sumatoria de corrientes entrantes es igual a la sumatoria de corrientes salientes:

$$\sum_{j=1}^{k} i_j = \sum_{k+1}^{n} i'_j \quad \text{o, lo que es lo mismo,} \quad \sum_{j=1}^{k} i_j - \sum_{j=k+1}^{n} i'_j = 0$$

Como $i_j = -i'_j$, las tres formulaciones son equivalentes. La LKC se cumple en todos los nudos, y es valida para cualquier instante de tiempo.

Podemos ver su aplicación en un ejemplo:

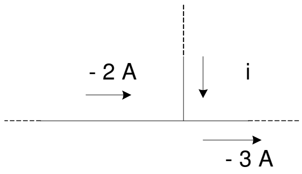


Fig. 15

Según la formulación (a) será: $(-2) + (i) + 3 = 0 \quad i = -1A$

Según la formulación (b) será: $-(2) - i - 3 = 0 \quad i = -1A$

Según la formulación (c) será: $i + (-2) - (-3) = 0 \quad i = -1A$

Superficie de Gauss:

Una ley fundamental de física asegura que la carga eléctrica se conserva: no existen experimentos que muestren que las cargas eléctricas se creen o se destruyan y la LKC lo expresa en el contexto de los circuitos a parámetros concentrados. Para formular la LKC podemos también usar una superficie de Gauss, la cual es, por definición una superficie cerrada de dos lados: uno interior y otro exterior. Para expresar que la suma de las cargas dentro de la superficie **S** es constante, requeriremos que, para todo t, la suma algebraica de las corrientes que salen de **S** sea cero. Así tendremos que:

"En los circuitos a parámetros concentrados, para toda superficie de Gauss **S**, para todo t, la $\sum i = 0$ "

Esta formulación de la LKC la aplicaremos en los dos casos siguientes:

Caso 1:

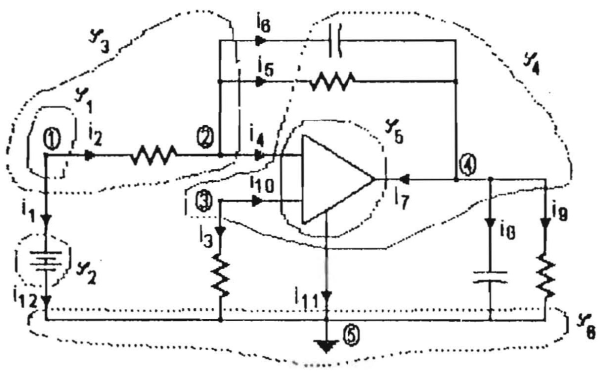


Fig. 16

Elijamos **S** de forma de cortar sólo los conductores que conectan los elementos de circuito. En este circuito vemos un elemento de cuatro terminales: un amplificador operacional (A.O), el cual se conecta al resto de la red en los nudos 2, 3, 4, y 5. Dibujamos 6 superficies de Gauss, y las usaremos para ilustrar la LKC.

-Para $\mathbf{S}_1$: $- i_1(t) - i_2(t) = 0$

esta superficie sólo contiene al nudo 1 en su interior, luego, un nudo puede considerarse un caso especial de superficie de Gauss, la cual se ha 'encogido" hasta ser un punto.

-Para $\mathbf{S}_2$: $i_1(t) - i_{12}(t) = 0$ ó $i_1(t) = i_{12}(t)$

esta superficie encierra a la batería. Luego, como conclusión sacamos que para un elemento de dos terminales, la corriente que ingresa al mismo por un nudo en cualquier instante t es igual a la corriente que sale del elemento en t.

-Para $\mathbf{S}_3$: $-i_1(t) - i_4(t) - i_5(t) - i_6(t) = 0$

-Para $\mathbf{S}_4$: $i_6(t) + i_5(t) + i_4(t) - i_3(t) - i_{11}(t) - i_8(t) - i_9(t) = 0$

-Para $\mathbf{S}_5$: $i_4(t) + i_{10}(t) + i_7(t) - i_{11}(t) = 0$

Notemos que estas son las cuatro corrientes vinculadas al A.O. Luego, la elección de una superficie de Gauss que incluye a cualquier elemento de n terminales, nos lleva a plantear que la suma algebraica de las corrientes que salen o entran del elemento es igual a cero para todo t.

-Para $\mathbf{S}_6$: $i_{12}(t) + i_3(t) + i_{11}(t) + i_8(t) + i_9(t) = 0$

Esta superficie solo contiene al nudo de referencia 5, por lo que la LKC para nudos dice que para todo circuito a parámetros concentrados, para todo t, la sumatoria de las corrientes que entran a un nudo es cero.

Caso 2: En la siguiente figura, queremos calcular i:

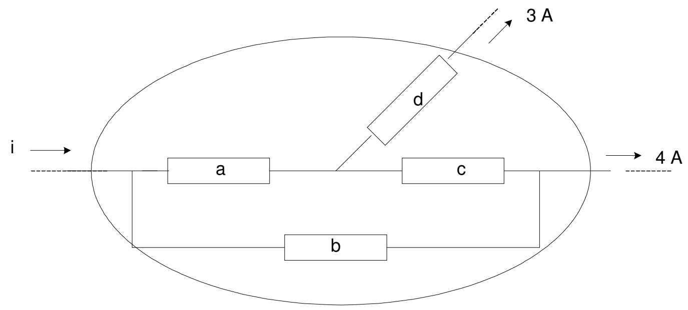


Fig. 17

Para resolver, creamos un nudo 'gigante', que incluye a los elementos a, b, c, d, en una superficie cerrada, solo atravesada por los tres conductores. Aplicamos que:

$$\Sigma\, i_{entrantes} = \Sigma\, i_{salientes}$$

y obtendremos: $i = 3 + 4 = 7$ A

Restricción: no se puede aplicar la superficie de Gauss si con ella se cortan condensadores.

1.9.2 Ley de Kirchhoff de tensiones.

Dado cualquier circuito conectado a parámetros concentrados con n nudos, podemos elegir arbitrariamente uno de ellos como referencia, para medir potenciales eléctricos. Por conectado significamos que cualquier nudo puede alcanzarse desde cualquier otro mediante un camino a través de los elementos del circuito.

Con respecto al nudo elegido como referencia, definimos n-1 tensiones contra la referencia, como se muestra en la fig. 18. Dado que el circuito es conectado, estas n-1 d.d.p. están bien definidas y son, en principio, cantidades físicamente mensurables. Luego, las denominamos φ_1, φ_2, φ_{n-1} y les asociamos signos + y - que indican el sentido de referencia de la tensión. Nótese que $\varphi_n = 0$ dado que n es el nudo de referencia.

Sea v_{k-j} la d.d.p. entre los nudos k y j (fig. 18). La LKT plantea:

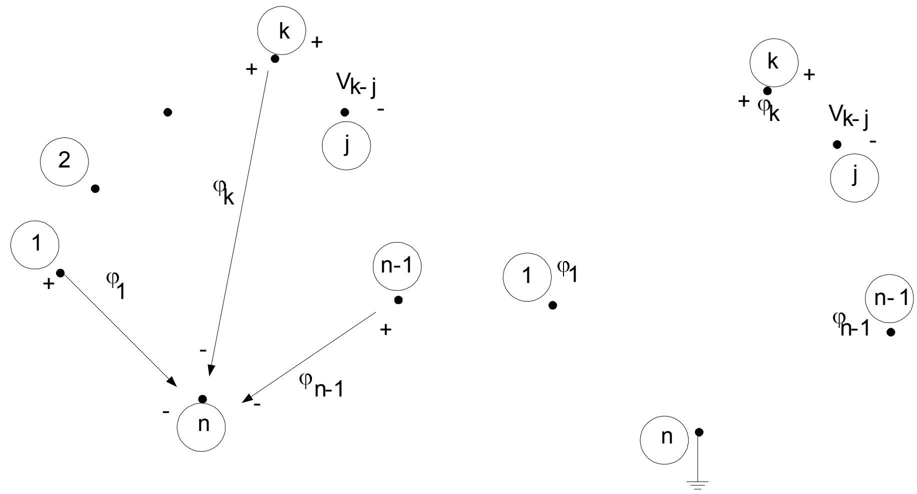


Fig. 18

Para todos los circuitos conectados a parámetros concentrados, y para cualquier elección del nudo de referencia, para todo t, para todo par de nudos k y j, se verifica que:

$$v_{k-j}(t) = \varphi_k(t) - \varphi_j(t)$$

Claramente, $v_{j-k}(t) = \varphi_j(t) - \varphi_k(t) = -v_{k-j}(t)$

<u>Ejemplo:</u> En el siguiente circuito, constituido por 5 elementos de dos terminales y uno de 3 denominado T, hay 5 nudos. Elegimos el 5 como referencia, y definimos las cuatro tensiones φ_1, φ_2, φ_3, φ_4. Luego, por LKT podemos escribir las siguientes siete ecuaciones.

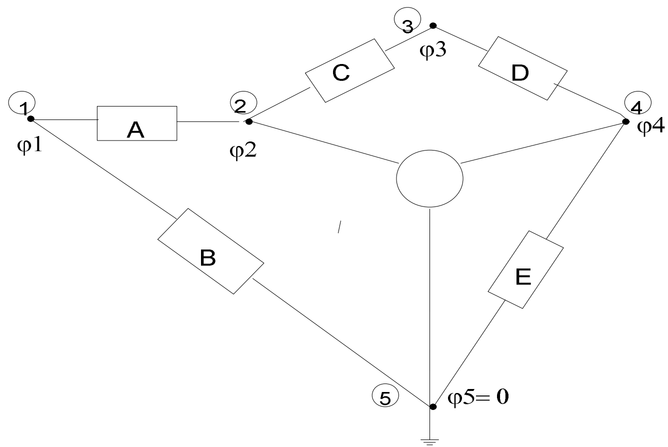


Fig. 19

$$v_{15} = \varphi_1 - \varphi_5 = \varphi_1$$

$$v_{45} = \varphi_4 - \varphi_5 = \varphi_4$$

$$v_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$v_{24} = \varphi_2 - \varphi_4$$

$$v_{23} = \varphi_2 - \varphi_3$$

$$v_{52} = \varphi_5 - \varphi_2 = -\varphi_2$$

$$v_{34} = e_3 - e_4$$

Vemos que v_{15} y v_{12} son las tensiones en bornes de los elementos de dos terminales A y B; v_{24}, v_{45} y v_{52} son las tensiones entre los pares de nudos 2-4, 4-5, y 5-2 del elemento de tres terminales T.

Si sumamos las tres últimas ecuaciones:

$$v_{45} + v_{24} + v_{52} = \varphi_4 + \varphi_2 - \varphi_4 - \varphi_2 = 0$$

La secuencia de nudos 2-4-5-2 es cerrada porque comienza y termina en el mismo nudo 2. Luego, la suma de tensiones en ella es cero.

Consideremos ahora la secuencia 1-2-3-4-5-1. Teniendo en cuenta las ecuaciones escritas anteriormente, llegamos a que:

$$v_{12} + v_{23} + v_{34} + v_{45} + v_{51} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_3 - \varphi_4 + \varphi_4 - \varphi_1 = 0$$

La secuencia 1-2-3-4-5-1 es un bucle, es decir, es **un camino cerrado que arranca de cualquier nudo, atraviesa por elementos de dos terminales y finaliza en el mismo nudo**. La secuencia 2-4-5-2 no es un bucle, como tampoco lo es la secuencia 3-4-5-3 o la 2-3-5-2.

Replanteamos entonces la LKT en términos de secuencia cerrada de nudos (o caminos cerrados);

Para todos los circuitos conectados a parámetros concentrados, para todos los caminos cerrados, para todo t, la suma algebraica de todas las d.d.p. entre nudos alrededor del camino elegido es cero.

En forma experimental, si exploramos las tensiones en un lazo con un voltímetro, y según los sentidos arbitrariamente positivos que hayamos asignado a las tensiones, obtendremos lo siguiente:

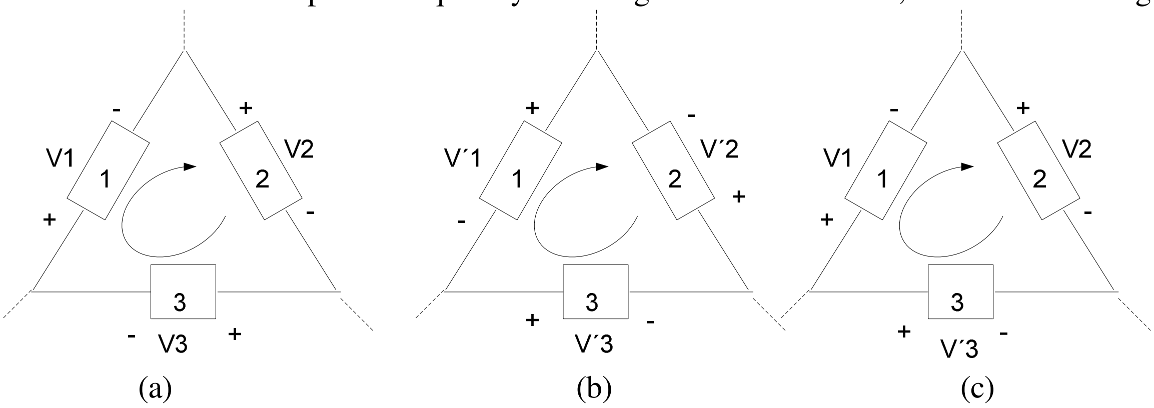


Fig. 20

Supongamos el caso mostrado en la fig. 20a, adoptando un recorrido en sentido horario. Tendremos:

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

Todas las tensiones se suman para dar cero, o sea que no todas son del mismo signo.

En la fig. 20b, tendremos:

$$v'_1 + v'_2 + v'_3 = 0$$

y en 20c será:

$$v_1 + v_2 - v'_3 = 0$$

Vemos así que, tal como ocurría con la LKC, la LKT puede plantearse también de tres formas, considerando el caso general de tener n elementos:

a) $$\sum_{j=1}^{n} v_j = 0$$

b) $$\sum_{j=1}^{n} v_{j'} = 0$$

c) $$\sum_{j=1}^{k} v_j = \sum_{k+1}^{n} v'_j \qquad \sum_{j=1}^{k} v_j - \sum_{k+1}^{n} v'_j = 0$$

A veces se usa una <u>forma alternativa</u> de la LKT: "la suma de tensiones entre dos nudos de un circuito es independiente del camino tomado para ir de uno a otro de los nudos". Esto lo podemos observar con el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

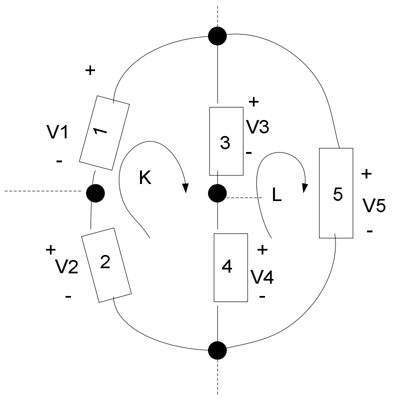


Fig. 21

En el lazo K: $v_1 + v_2 = v_3 + v_4$

En el lazo L: $v_3 + v_4 = v_5$

Si el recorrido se hubiera efectuado a través de los elementos 1-2-5-1, hubiera sido:

$$v_1 + v_2 = v_5$$

Así, vemos que:

$$v_1 + v_2 = v_3 + v_4 = v_5 = v_{mn}$$

Independientemente del camino elegido para ir de <u>m</u> a <u>n</u>, el valor obtenido es siempre el mismo. <u>Por convención</u>, el primer subíndice es + y el segundo es - y se deduce que:

$$v_{mn} = - v_{nm}$$

<u>Nota:</u> Para cualquier circuito conectado con <u>n</u> nudos, elijamos arbitrariamente el nudo <u>n</u> como referencia, luego, las n-1 d.d.p. contra la referencia φ_1, φ_2, ... φ_{n-1} especifican en forma unívoca y sin ambigüedad posible la tensión v_{j-k} desde cualquier nudo j a otro nudo k del circuito. Este hecho es de gran importancia en la Teoría de Circuitos, y es clave en el análisis de circuitos por el método de nudos, tal como se verá oportunamente.

<u>RECORDEMOS</u>

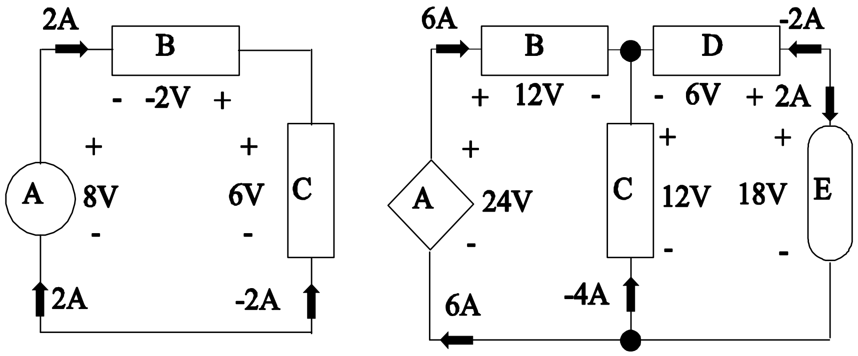
1) La LKT y la LKC son dos postulados fundamentales de la teoría de circuitos a parámetros concentrados.

2) La LKT y la LKC se cumplen independientemente de la naturaleza de los elementos que constituyen el circuito. Luego, podemos decir que reflejan las propiedades de interconexión del mismo.

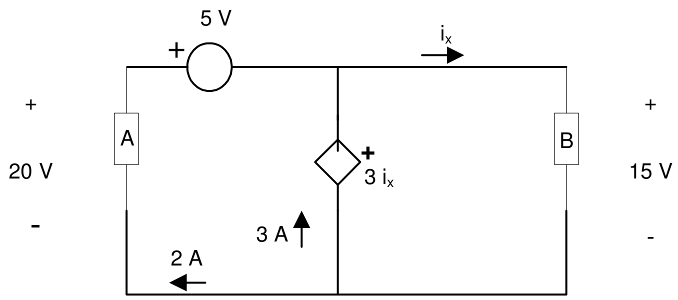
3) Las leyes de Kirchhoff siempre conducen a ecuaciones lineales algebraicas homogéneas con coeficientes reales constantes de valor 1, -1 o 0.

Ejercicios de aplicación:

1) Para los circuitos mostrados en la figura, verificar las layes de Kirchhoff y calcular el balance de potencia.



2) Determinar la potencia absorbida o entregada por cada elemento del circuito de la figura siguiente. Demostrar que la suma de la potencia entregada es igual a la suma de la potencia absorbida.



Rta: *P_B = 75 W absorbidos* *P_A = 40 W entregados* *P_{5V} = 10 W absorbidos*
P_x = 45 W entregados

1.10 Resolución de circuitos mediante Leyes de Kirchhoff

De acuerdo a lo visto, a cada rama de un circuito podemos asociarle una corriente o una tensión. Si el número total de ramas es **b**, entonces tendremos **b** magnitudes (corrientes o tensiones) que jueguen el papel de incógnitas o variables para hallar el estado de régimen del circuito en cuestión.

Lo que debemos demostrar ahora es cuántas de esas corrientes o tensiones constituyen un conjunto linealmente independiente que nos permitirá efectivamente resolver el circuito, lo cual nos va a decir cuántas ecuaciones necesitamos de cada una de las Leyes de Kirchhoff.

Vimos que la ley de Kirchhoff de Corrientes (LKC), que en esencia expresa el principio de conservación de carga, plantea que la suma algebraica de las corrientes en un nudo es cero:

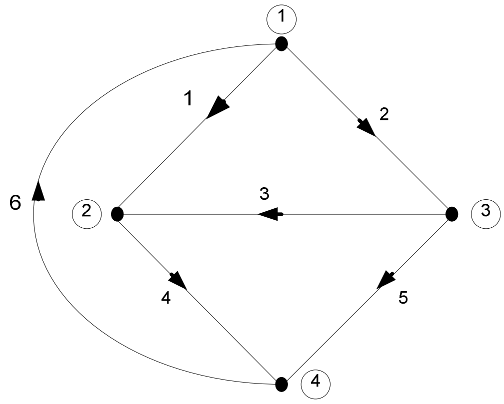
$$\sum \pm \mathrm{i} = 0$$

Mientras que la ley de Kirchhoff de Tensión (LKT) expresa el hecho simple de que la suma algebraica de las caídas de tensión en cualquier conjunto de ramas sucesivas que forman un camino cerrado (también llamado lazo o bucle), debe ser cero. Simbólicamente:

$$\sum \pm \mathrm{v} = 0$$

Lo que necesitamos saber ahora el cuántas ecuaciones linealmente independientes debemos plantear para poder resolver un circuito mediante las leyes de Kirchhoff.
Respecto de la LKC, supongamos escribir las ecuaciones para varios nudos adyacentes. Si las observamos cuidadosamente, vemos que cada una contiene al menos un término que no aparece en las otras. Estas ecuaciones son seguramente independientes, porque no es posible expresar ninguna como combinación lineal de las restantes, ya que cada una tiene términos que las demás no poseen. Esto se cumple hasta que se han escrito las ecuaciones de todos los nudos menos uno, o sea que se pueden plantear $n_a = n - 1$ ecuaciones l.i. de la LKC.

En el circuito siguiente:



$$\begin{array}{ccccccccc}
-i_1 & -i_2 & & & & +i_6 & = & 0 \\
i_1 & & +i_3 & -i_4 & & & = & 0 \\
& i_2 & -i_3 & & -i_5 & & = & 0 \\
& & & i_4 & +i_5 & -i_6 & = & 0
\end{array}$$

Fig. 22

Vemos que sumando miembro a miembro todas las ecuaciones, llegamos a 0 = 0, por lo que concluimos que con 4 nudos, y por lo tanto 4 ecuaciones de la LKC, solo 3 son linealmente independientes. Podemos generalizar esta conclusión, diciendo que:

En un circuito con n nudos, solo se pueden plantear n-1 ecuaciones l.i de la LKC.

Ahora bien, si nuestro circuito tiene b ramas, es decir, b incógnitas, y la ley de Kirchhoff de corriente nos provee n-1 ecuaciones l.i, entonces concluimos que la ley de Kirchhoff de tensiones nos debe proveer las ecuaciones restantes, es decir:

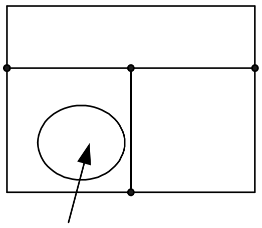
En un circuito con b ramas, se pueden plantear b – (n – 1) = b – n +1 ecuaciones l.i de la LKT.

Supongamos tener una red con 20 ramas y 12 nudos. Luego, necesitaremos plantear:

12-1 = 11 ecuaciones l.i de la LKC y

20 – (12 -1) = 9 ecuaciones l.i de la LKT.

En lo que respecta a los caminos cerrados, podemos identificar dos tipos: los que denominamos **mallas**, o caminos cerrados "mínimos", que no cortan ramas, y los que denominamos **bucles**, que pueden encerrar varias mallas en su interior, y que sí cortan ramas. Estas denominaciones están vinculadas con dos métodos sistemáticos de resolución de circuitos que analizaremos con más detalle en el capítulo 3.



Surge, sin embargo, la cuestión de qué caminos cerrados y qué nudos debemos elegir para garantizar que el sistema de ecuaciones obtenido es linealmente independiente. Para ello, podemos decir que:

- La LKT se satisfará en toda la red si la escribimos para cada malla (camino cerrado mínimo) de la misma.
- Para satisfacer la LKC será suficiente con escribirla n - 1 veces, donde n es el número de nudos de la red, ampliando la definición de "nudo" al el conjunto de puntos que están unidos entre sí por cortocircuitos, o al punto de unión de dos o más ramas.

La independencia de las leyes de Kirchhoff estará asegurada si se verifica lo siguiente:

1. Condición necesaria (aunque no suficiente): que todas las ramas participan en los caminos, porque si una o más no lo hicieran, las corrientes en las mismas serían independientes.

2. Condición suficiente (no necesaria): elegir los caminos cerrados sucesivamente, de forma que cada camino adicional involucre al menos una rama que no es parte de los caminos seleccionados previamente. De esta forma, no será posible expresar una ecuación como combinación lineal de las otras.

1.11 Formulación matricial de las Leyes de Kirchhoff

Las propiedades de interconexión de un circuito pueden mostrarse por medio de un gráfico, denominado "grafo del circuito". El grafo retiene todas las propiedades de interconexión del circuito, pero suprime información respecto a los elementos del mismo.
Luego, en lo que concierne a las LKT y LKC, el grafo de un circuito es todo lo que necesitamos, dado que el mismo nos provee información acerca del número de ramas y nudos del circuito.

Un grafo **G** está especificado por un conjunto de nudos (1, 2,...n) y un conjunto de ramas (β_1, β_2,...β_b). Si a cada rama se le da una orientación, indicada por una flecha en la misma, podemos hablar de un grafo orientado, o grafo dirigido (digrafo). En la Figura 23 mostramos un grafo con 5 nudos y 7 ramas, o sea n = 5, b = 7. Las flechas en las ramas indican las direcciones de referencia de las corrientes.

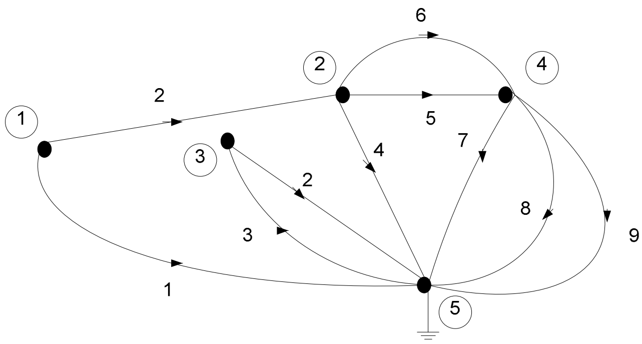
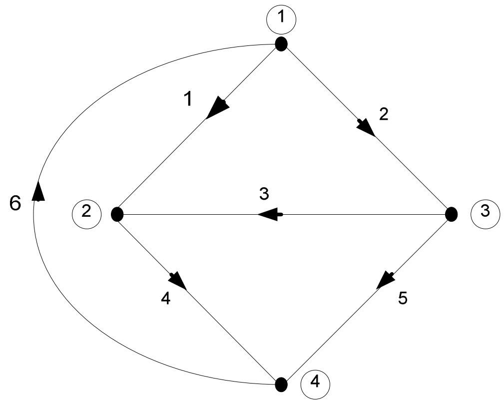


Figura 23: Ejemplo de grafo orientado

Ley de Kirchhoff de corrientes:

Estudiaremos el grafo de 4 nudos y 6 ramas de la Figura 24, cuyo sistema de ecuaciones de la LKC hemos escrito previamente.



$$\begin{array}{cccccccc} -i_1 & -i_2 & & & & +i_6 & = & 0 \\ i_1 & & +i_3 & -i_4 & & & = & 0 \\ & i_2 & -i_3 & & -i_5 & & = & 0 \\ & & & i_4 & +i_5 & -i_6 & = & 0 \end{array}$$

Figura 24

En forma matricial, este sistema será:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & & & & 1 \\ 1 & & 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & & -1 & \\ & & & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vemos que aparece una matriz de coeficientes, a la cual denominaremos A_a (matriz incidencia), cuyos elementos son 1, -1 o 0, y que cada ecuacion tiene la forma:

$$\sum_{k=1}^{b} a_{jk}\, i_k = 0$$

Los elementos a_{ik} de la matriz estarán definidos para j = 1,2,...n y k = 1,2,...b como:

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ si la rama } \underline{k} \text{ entra al nudo } \underline{i} \\ -1 \text{ si la rama } \underline{k} \text{ sale del nudo } \underline{i} \\ 0 \text{ si la rama } \underline{k} \text{ no toca al nudo } \underline{i} \end{cases}$$

por lo que podemos escribir:

$$\mathbf{A_a}\, \mathbf{I} = 0$$

De lo visto anteriormente, sabemos que las cuatro ecuaciones no constituyen un sistema linealmente independiente. Por lo tanto, sólo habrá n-1 ecuaciones l.i. de la LKC. Esto significa tomar un nudo como referencia, y ahora obtenemos, desechando la fila correspondiente a ese nudo, la matriz incidencia reducida **A**, de dimensión (n - 1) x b, de donde la ecuación de la LKC será, tomando el nudo 4 como referencia:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{I} = 0$$

donde:

$\mathbf{A} = [\ a_{ik}\ ]$ matriz incidencia reducida

$\mathbf{I} = [\ i_1, i_2, ...i_b\ ]^T$ vector corriente de rama

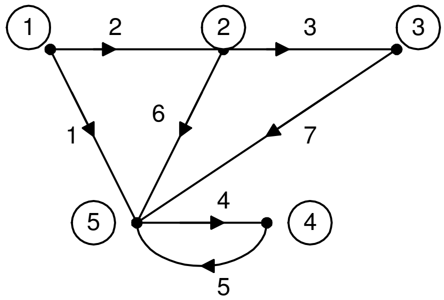
0 matriz cero, de dimensiones arbitrarias y todos sus elementos iguales a cero.

Ejercicio de aplicación:

1) *Dibujar el grafo y escribir el sistema de ecuaciones de la ley de Kirchhoff de corrientes a partir de la siguiente matriz incidencia reducida:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2) *a) Escribir la matriz incidencia A_a para el grafo de la figura.*
b) Escribir la matriz incidencia reducida A con el nudo "5" como referencia.
b) Usando A, escribir un sistema de ecuaciones de LKT y LKC linealmente independiente.



3) *Dada la matriz incidencia reducida de un grafo:*

$$\begin{array}{cc} & \text{Nudo} \\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \\ \text{Rama} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} & \end{array}$$

Dibujar el grafo asociado y marcar todas las ramas y nudos.

Ley de Kirchhoff de tensiones:

Expresando las tensiones de rama como diferencia entre tensiones de nudos, la LKT puede escribirse, en valores instantáneos, como:

$$v_k = \sum_{j=1}^{n_t - 1} a_{jk}\, \varphi_j \qquad\qquad \text{para } k = 1,2,...b$$

Tal como procedimos con la LKC, podemos obtener la expresión de la LKT en forma matricial. Escribiremos las ecuaciones de la LKT para el grafo de la fig. 24, usando sentidos asociados a los de las corrientes (o sea, borne positivo aquél por donde ingresa la corriente), y recordando que hemos eliminado el nudo 4, tomándolo como referencia.

$$\begin{aligned}
v_1 &= -\varphi_1 + \varphi_2\\
v_2 &= -\varphi_1 + \varphi_3\\
v_3 &= \varphi_2 - \varphi_3\\
v_4 &= \varphi_4 - \varphi_2 = -\varphi_2\\
v_5 &= \varphi_4 - \varphi_3 = -\varphi_3\\
v_6 &= -\varphi_4 + \varphi_1 = -\varphi_1
\end{aligned}$$

En este sistema, $\varphi_4 = 0$ dado que lo tomamos como referencia, y pasando a la forma matricial, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} v1\\ v2\\ v3\\ v4\\ v5\\ v6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi 1\\ \varphi 2\\ \varphi 3\\ \varphi 4 \end{bmatrix}$$

La expresión general entonces es de la forma:

$$[V] = [M]\,[\varphi]$$

donde:

$[V] = (v_1, v_2, ...v_b)^T$ es el vector tensión de rama,

$[\varphi] = [\varphi_1, \varphi_2, ... \varphi_{n-1}]$ es el vector potencial de nudos,

$[M]$ es una matriz de orden b x (n-1) cuyos elementos son 1, -1 o 0.

Pensando en función de la LKT, vemos que para k = 1,2,...b, e i= 1,2,..n-1,

$$v_k = \sum_{j=1}^{n_t - 1} a_{jk}\, \varphi_j$$

Comparando las matrices **A** y **M**, vemos que:

$$[M] = [A]^T$$

con lo cual la ley de Kirchhoff de tensiones se puede expresar en forma más útil como:

$$[v]_{(bx1)} = [A]_{T(bx(n-1))}\,[\varphi]_{((n-1)x1)}$$

1.12 Teorema de Tellegen.

Este teorema apareció por primera vez con el título "A general network theorem, with applications" en el Philips Research Reports 7, 259-269, del año 1952, y expresa una consecuencia directa de principio de conservación de la energía. Su demostración se basa en las propiedades de los circuitos de satisfacer las leyes de Kirchhoff, y es mediante la expresión de las mismas en forma matricial que se logra una demostración sencilla y elegante.

Problema introductorio al teorema:

Consideremos el circuito de la figura 25 eligiendo arbitrariamente i_1, i_2, i_3 y calculando i_4, i_5 e i_6 para satisfacer la LKC.

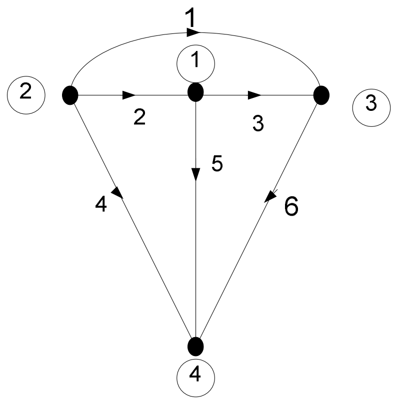


Figura 25

Sea:

$$\begin{array}{lcl} i_1 = 1\ A & & i_4 = -3\ A \\ i_2 = 2\ A & \Rightarrow & i_5 = -1\ A \\ i_3 = 3\ A & & i_6 = 4\ A \end{array}$$

Elijamos ahora arbitrariamente v_4, v_5, v_6 con sentidos asociados a los de i_4, i_5, i_6 y calculemos v_1, v_2, v_3 para que se cumpla la LKT.

$$\begin{array}{lcl} v_4 = 4\ V & & v_1 = -2\ V \\ v_5 = 5\ V & \Rightarrow & v_2 = -1\ V \\ v_6 = 6\ V & & v_3 = -1\ V \end{array}$$

Vemos que $i_1,...i_6$ obedecen a la LKC, y $v_1, ...v_6$ a la LKT. Ahora es fácil verificar que:

$$\begin{array}{lll} v_1\, i_1 = -2\ W & v_2\, i_2 = -2\ W & v_3\, i_3 = -3\ W \\ v_4\, i_4 = -12\ W & v_5\, i_5 = -5\ W & v_6\, i_6 = 24\ W \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{k=1}^{6} V_k\, I_k = 0$$

Resultado sorprendente si se considera que las i_k y las v_k no guardan relación entre sí.

Enunciado y Demostración del Teorema:

Consideremos un circuito arbitrario, cuyo grafo orientado **G** tiene b ramas. Tomemos sentidos de referencia asociados. Sea $\mathbf{i} = (i_1, i_2, ...i_b)^T$ un conjunto cualquiera de corrientes de rama que satisfacen la LKC para **G**, y sea $\mathbf{v} = (v_1, v_2,...v_b)^T$ un conjunto cualquiera de tensiones de rama que satisfaga la LKT para **G** . Luego:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{b} v_k\, i_k = 0}$$

Demostración: Para el grafo orientado conectado **G**, elijamos un nudo dato, de esta forma, su matriz incidencia reducida **A** queda definida sin ambigüedad. Dado que **i** satisface la LKC, tenemos que, por ley de Kircchoff de corrientes:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{i} = 0$$

Dado que v satisface la LKT, y siendo que estamos utilizando sentidos de referencia asociados, será:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^{T}\,\mathbf{e}$$

Utilizando estas dos ecuaciones, obtenemos, sucesivamente,

$$\mathbf{v}^{T}\,\mathbf{i} = (\mathbf{A}^{T}\,\mathbf{e})^{T}\,\mathbf{i} = \mathbf{e}^{T}\,(\mathbf{A}^{T})^{T}\,\mathbf{i} = \mathbf{e}^{T}\,(\mathbf{A}\mathbf{i}) = 0$$

que era lo que queríamos demostrar.

Vemos que esto es una consecuencia del principio de conservación de potencia, lo cual nos permite asegurar que en cualquier circuito la potencia total es cero. Las **tensiones y corriente involucradas** no necesitan guardar ninguna relación entre sí, las tensiones sólo debe satisfacer LKT y las corrientes sólo debe satisfacer la LKC, debiendo usarse sentidos de referencia asociados.

En conclusión, en todo circuito se verificará el balance de potencias si en el mismo se cumplen las Leyes de Kirchhoff.

1.12 Estados de régimen

Diremos que un circuito eléctrico energizado ha alcanzado su estado de régimen, cuando la evolución temporal de los parámetros determinantes (tensiones o corrientes) es una función solamente de los elementos que lo energetizan. Es decir, que los distintos estados de régimen estarán regidos por las distintas evoluciones de las fuentes, las cuales determinarán la solución permanente. Las magnitudes con que trabajaremos al analizar nuestros circuitos: f.e.m., flujo magnético, corriente, tensión, carga eléctrica, etc., estarán definidas cuando, elegido un sentido positivo convencional, se puedan expresar matemáticamente sus evoluciones temporales.

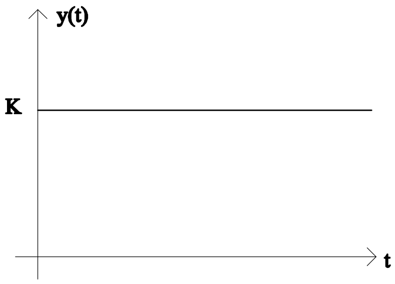
Supongamos ahora tener una función genérica:

$$y = y(t)$$

que puede representar una corriente o cualquier otra magnitud mencionada. A esta función le asignamos un sentido convencionalmente positivo y, de acuerdo con las características de su evolución temporal, clasificaremos los regímenes correspondientes.

Clasificación de los estados de régimen

a) Régimen estacionario: la función es invariante en el tiempo (o sea, es una constante). A este régimen normalmente se lo designa “de corriente continua”.



$$y(t) = K \quad \forall \ t$$

Fig. 26

b) Régimen variable: la función varía en el tiempo. Entre los regímenes variables existen algunos de especial interés, por lo que hacemos una subclasificación:

- Régimen Variable
  - Periódicos o Permanentes
    - Permanente alterno
      - Permanente alternante en el tiempo
      - Permanente senoidal, armónico o isofrecuencial
    - Permanente unidireccional
  - Aperiódicos

Aperiódico: la función no admite período alguno, o aparece y desaparece.

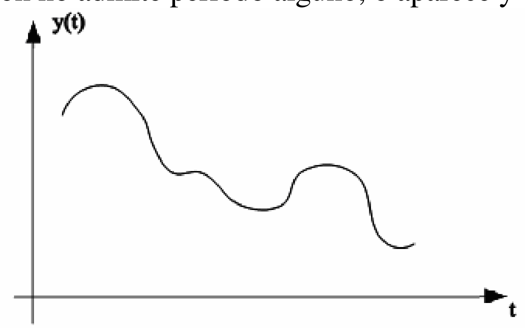


Fig. 27

Periódico o permanente: la función admite un período T, es decir, que se verifica:

$$y\ (t) = y\ (t + T)$$

Denominándose período al menor intervalo en el cual la función repite su valor con la misma pendiente.

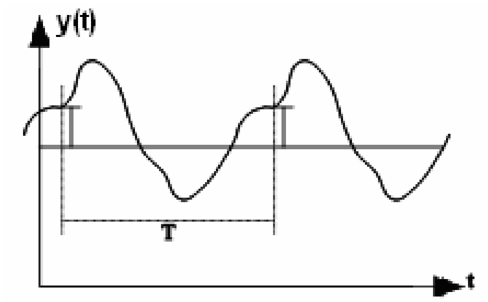


Fig.28

Permanente Alterno: la función evoluciona periódicamente tomando valores > 0 y < 0. Es decir, cambia de signo (y por lo tanto, la magnitud asociada cambia de sentido) en distintos instantes de un mismo período.

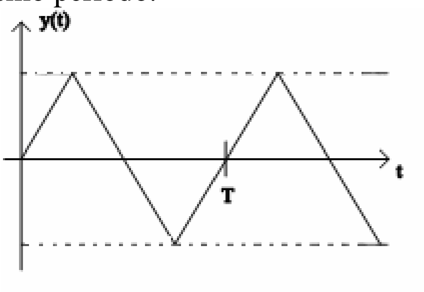


Fig. 29a

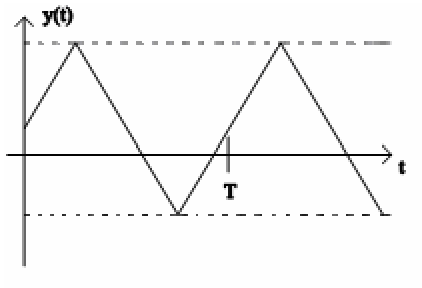


Fig. 29b

Permanente unidireccional: la función periódica evoluciona sin cambiar de signo. Es decir, la magnitud asociada conserva su sentido en todo el período.

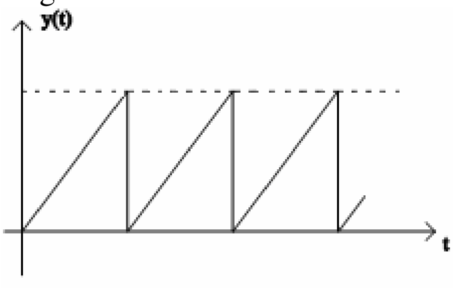


Fig. 30 a

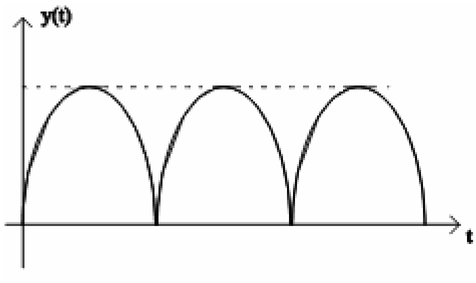


Fig. 30 b

Permanente alternante en el tiempo: la función cambia de signo cada medio período, o sea:

$$y\,(t) = -\,y\,(t \pm \frac{T}{2})$$

Si cumple esta condición, el desarrollo en serie de Fourier no posee armónicas pares.

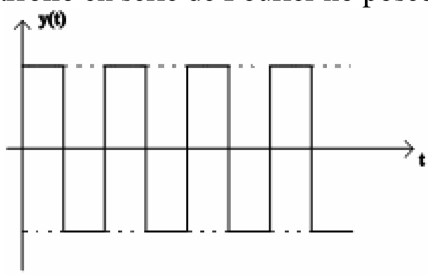
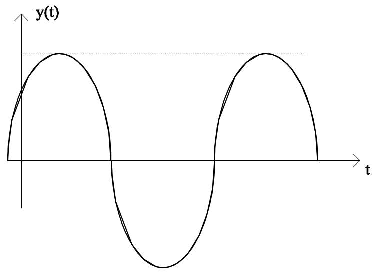


Fig. 31

Permanente senoidal, armónico o isofrecuencial: la función alternante en el tiempo es de tipo senoidal:



$$y(t) = Y_{\max} \ sen\ (\omega\, t + \varphi\ )$$
$$Y_{\max} = amplitud$$
$$\omega = pulsacion$$
$$\varphi = angulo\ de\ \ fase\ inicial$$

Fig. 32

El nombre “armónico” o “isofrecuencial” proviene del hecho de que un desarrollo en serie de Fourier de esta función dicho desarrollo nos da una componente de una sola frecuencia (o armónica).

En nuestra materia veremos los distintos estados de régimen, generados por ondas que pueden ser descriptas mediante funciones:

- Constantes: régimen de corriente continua (CC),
- Senoidales: régimen de corriente alterna (CA),
- Periódicas: régimen poliarmónico, que demostraremos que se puede resolver mediante un desarrollo en serie de Fourier como una superposición de ondas senoidales.

También estudiaremos los circuitos en régimen transitorio, mediante el método clásico de planteo y resolución de ecuaciones diferenciales, o mediante técnicas especiales (transformada de Laplace), analizando qué ocurre con las tensiones y corrientes cuando, en un circuito que está en régimen permanente, se produce una perturbación (apertura o cierre de una llave, cambio en la forma de onda de la alimentación, etc.).

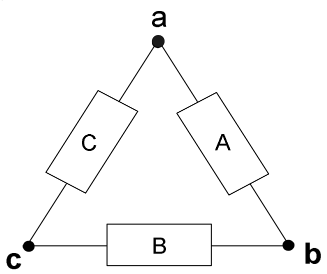
PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1) Un sistema eléctrico consiste en tres partes, “A”, “B” y “C”, como se indica en la figura. Se sabe que el dispositivo “A” absorbe 2 J por cada C de carga positiva que se desplaza a través del mismo desde el borne a al b. Al mismo tiempo, si 1 C de carga positiva se desplaza a través de “B” desde b hasta c, dicho elemento absorbe 4 J.

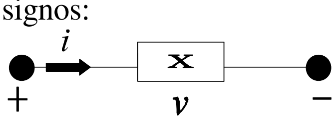
a) Calcular V_{ab} , V_{bc} y V_{ca}

c) Basándose en el hecho de que la carga no se acumula en un dispositivo y en la conservación de la energía, ¿cuál sería la energía absorbida por el dispositivo “C” por cada C de carga que lo atraviesa desde c hasta a?

e) ¿Cuánto es la suma V_{ab}, V_{bc} y V_{ca}?



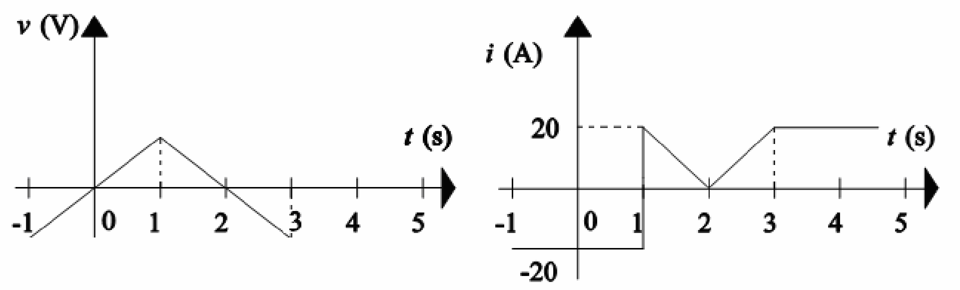
2) Dada la siguiente convención de signos:



hallar y graficar la potencia instantánea absorbida por el dispositivo X en función del tiempo, y la energía total absorbida por X en el intervalo 0 a t, y calcular la potencia media absorbida por X en el intervalo $0 < t < \infty$. Las tensiones y corrientes están en volts y amperes, respectivamente.

a) V=10	i=5	t>0
b) V=10	$i=5\ e^{-4t}$	t>0
c) V=10	$i=20 \cos 2\pi t$	t>0
d) $V=10 \cos 2\pi t$	$i=20 \text{ sen } 2\pi t$	t>0

3) Respetando la misma convención de signos del problema anterior, y con la tensión y corriente graficadas en la figura siguiente, determinar y graficar la potencia instantánea absorbida por el dispositivo X en función del tiempo para $-1 < t < 4$. Hallar la potencia media absorbida en dicho intervalo de tiempo.



4) La batería de un automóvil tiene una tensión en sus bornes de aproximadamente 12 V cuando el motor está apagado y no está conectado el arranque. Un auto se estaciona con el estereo funcionando, el cual consume 60 W, y algunas luces encendidas, que consumen 120 W. Con una carga de este tipo, la batería suministrará aproximadamente $1{,}2\times10^6$ J de energía antes de perder capacidad para arrancar el auto.

a) ¿Qué potencia debe suministrar la batería?

b) ¿Qué corriente debe suministrar la misma?

c) Aproximadamente, ¿cuánto tiempo podrá permanecer estacionado el auto con las luces encendidas y el estereo andando y luego arrancar?

5) La corriente promedio en un relámpago es de 2×10^4 A, y su duración es de 0,1 segundos (Williams, 1988). La diferencia de potencial entre las nubes y la tierra es de 5×10^8 V. Determine la carga total transmitida a la tierra y la energía liberada.

Rta: $Q = 2 \times 10^3$ C $\qquad$ $W = 10^{12}$ J = 1 TJ

6) Se dispone de una pequeña batería alcalina de 1,5 V con una energía almacenada nominal de 150 Joules. ¿Cuántos días funcionará una calculadora de bolsillo que consume una corriente de 2 mA? ¿Puede apreciarse por qué el apagado automático es una buena idea?

8) La batería de un automóvil se carga con una corriente constante de 2 A durante 5 horas. El voltaje en bornes de la batería es $v = 11 + 0{,}5\ t$ V para $t > 0$, donde t está en horas.

- Determine la energía entregada a la batería durante las cinco horas y grafique w(t).
- Si el costo de la energía eléctrica fuera de 10 centavos / kWh, calcule el costo de cargar la batería durante 5 horas.

Rta: 1,23 centavos